GUIA DE APRENDIZAJE: EXPRESIONES ALGEBRAICAS FRACCIONARIAS

Aprendizajes Esperados: Resolver problemas que involucran ecuaciones fraccionarias.

Una expresión algebraica fraccionaria o expresión algebraica racional es el cociente de dos polinomios, es decir: $\frac{P(x)}{Q(x)} \quad \forall x \in \Re \ \ tal \ que \ \ Q(x) \neq 0$

Ejemplos 1:

a. $\frac{x}{x^2-3}$ b. $\frac{1}{x-1}$ c. $\frac{x^2-2x+5}{x^3+5x-10}$ d. $\frac{8x-7}{3}$

Las expresiones algebraicas racionales son, en muchos aspectos, muy semejantes, a los números racionales. Así por ejemplo en (a) **X** es el numerador y x^2-3 es el denominador de la expresión algebraica. Esto es muy importante ya que para sumar, restar, multiplicar y dividir expresiones algebraicas siguen las mismas reglas que los racionales.

Expresiones fraccionarias irreductibles

Para reducir una expresión racional a su mínima expresión, factorizamos completamente el numerador y el denominador, simplificando posteriormente los factores comunes, por ejemplo:

Ejemplo 2:

a) $$\frac{x^2-1}{x^2-6x+5} = \frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{(x-1)}(x-5)} = \frac{x+1}{x-5}$$

b) $$\frac{x^5-8x^2}{x^4+x^3-6x^2} = \frac{x^2\left(x^3-8\right)}{x^2\left(x^2+x-6\right)} = \frac{\cancel{x^2}\cancel{(x-2)}\left(x^2+2x+4\right)}{\cancel{x^2}\cancel{(x-2)}(x+3)} = \frac{x^2+2x+4}{x+3}$$

Observación

La expresión $\frac{x^2-1}{x^2-6x+5}$ es equivalente con $\frac{x+1}{x-5}$ por que la segunda se obtiene por una simplificación de la primera.

De igual manera $\frac{x^5-8x}{x^4-6x+5}$ es equivalente con $\frac{x^2+2x+4}{x+3}$. ¿Por qué?

Es claro entonces que al multiplicar el numerador y el denominador de una expresión algebraica por un mismo polinomio, se obtiene una expresión equivalente a la dada, es decir:

$$\frac{x-7}{x+5} = \frac{(x-7)(x+1)}{(x+5)(x+1)} = \frac{x^2-6x-7}{x^2+6x+5}$$

Usando este último resultado, dadas varias expresiones podemos encontrar otras, equivalentes a ellas, que tengan el mismo denominador, es decir, las reducimos a común denominador.

El ejemplo que sigue nos muestra como hacerlo:

Ejemplos 3: Reduce a común denominador las expresiones:

$$\frac{4x+1}{x} \quad ; \quad \frac{x+2}{x+1} \quad ; \quad \frac{x-3}{x(x+1)}$$

Procedemos como cuando trabajamos con las fracciones, es decir, hallamos el mínimo común múltiplo de los denominadores factorizados:

x	$x+1$	$x(x+1)$	x
1	$x+1$	$x+1$	$x+1$
1	**1**	**1**	

$$mcm = \{\ x(x+1)$$

Por lo tanto las nuevas expresiones reducidas a denominador común son:

$$\frac{(4x+1)(x+1)}{x(x+1)}; \qquad \frac{(x+2)x}{x(x+1)}; \qquad \frac{x-3}{x(x+1)}$$

Suma – Resta de expresiones algebraicas fraccionarias:

Coma ya dijimos las expresiones algebraicas fraccionarias son, en muchos aspectos, muy semejantes, a los números racionales. En este sentido se suman y restan de manera análoga a la suma y resta de racionales.

Ejemplo 1:

$$\frac{x+1}{3x}+\frac{2x-3}{x^2-2x}+\frac{x+2}{x-2}=$$

$$\boxed{m.c.m\ entre\ 2x, x^2-2x, x-2\ \ es\ \ 3x(x-2)}$$

$$\frac{(x+1)(x-2)}{3x(x-2)}+\frac{3(2x-3)}{3x(x-2)}+\frac{3x(x+2)}{3x(x-2)}=$$

$$\frac{(x^2-x-2)+(6x-9)+(3x^2+6x)}{3x^2-6x}= \quad \frac{4x^2+11x-11}{3x^2-6x}$$

Con la resta se procede de manera análoga.

Producto o Multiplicación:

El **producto** de dos expresiones algebraicas racionales es igual a la expresión que resulta de multiplicar los numeradores dividida por la multiplicación de los denominadores.-

Ejemplo 2:

$$\frac{5x+2}{x}\cdot\frac{5x-2}{x+1}=\frac{(5x+2)\,(5x-2)}{x\,(x+1)}=\frac{25x^2-4}{x^2+x}$$

División o cociente:

El **cociente** de dos expresiones algebraicas racionales es igual a la expresión que resulta de multiplicar la primera por la inversa de la segunda.-

Ejemplo 3:

a) $\dfrac{x^2-1}{x} \div \dfrac{x+1}{x} = \dfrac{x^2-1}{x} \cdot \dfrac{x}{x+1} = \dfrac{(x-1)(x+1)}{x} \cdot \dfrac{x}{x+1} = x-1$

b) $\dfrac{x+3}{x-3} \div \dfrac{1}{(x+3)^2} = \dfrac{x+3}{x-3} \cdot (x+3)^2 = \dfrac{(x+3)^3}{x-3}$

c) $\dfrac{5x+2}{x} \div \dfrac{5x-2}{x+1} = \dfrac{5x+2}{x} \cdot \dfrac{x+1}{5x-2} = \dfrac{5x^2+7x+2}{5x^2-2x}$

Ejercicios tipo PSU

1) Al simplificar la fracción: $\dfrac{x^2-y^2}{x-y}$ (con $x \neq y$) resulta:

A) $x-y$ B) $x+y$ C) $2x+2y$ D) $2x-2y$ E) $\dfrac{x-y}{2}$

2) Si $a \neq 0$, *entonces* $\dfrac{x-a}{a} + \dfrac{x+2a}{2a}$ es igual a:

A) $\dfrac{2x}{3a}$ B) $\dfrac{3x}{a}$ C) $\dfrac{3x}{2a}$ D) $\dfrac{2x+a}{a}$ E) $\dfrac{2x+a}{2a}$

3) Si, $a \neq 2$ *y* $a \neq 3$ *entonces* $\dfrac{a^2-4a+3}{2a-4} : \dfrac{a-3}{4a-8}$ es igual a:

A) $2a+2$ B) $a-1$ C) $2a-2$ D) $4a-4$ E) $2a^2-8a+6$

4) Si $x \neq 2$, entonces $\dfrac{x^2-4}{4-2x}$ es igual a:

A) $\dfrac{x+2}{2}$ B) $\dfrac{x+2}{-2}$ C) $x+1$ D) $x-1$ E) $2x-1$

5) $\dfrac{x^2-2x}{2x+4} : \dfrac{x}{x+2} =$

A) $\dfrac{x-2}{2x}$ B) $\dfrac{x-2}{2}$ C) $\dfrac{x+2}{2}$ D) $x+1$ E) $x-1$

6) Si $x \neq 1$, $y \neq -1$, entonces $\dfrac{x}{x+1} : \dfrac{x^2}{x^2-1} + \dfrac{1}{x}$ es igual a:

A) $\dfrac{x+2}{x}$ B) $\dfrac{2x+1}{x}$ C) 1 D) $\dfrac{1}{2}$ E) $\dfrac{x^3-x^2}{x^3+x^2-1}$

7) Si $x \neq 0$, $x \neq 1$ *y* $x \neq -1$, entonces $\dfrac{x+\dfrac{1}{x}}{x^2-\dfrac{1}{x^2}}$ es igual a:

A) $\dfrac{2}{x}$ B) $\dfrac{x^2+1}{x}$ C) $\dfrac{x^2-1}{x}$ D) $\dfrac{x}{x^2+1}$ E) $\dfrac{x}{x^2-1}$

8) Si $x \neq y$, entonces el valor de $\frac{x^2-y^2}{x-y}+\frac{(x-y)^2}{x-y}-(x-y)=$

A) $x-y$ B) $x+y$ C) $-x+y$ D) $\frac{x-y}{x+y}$ E) $2x+y$

9) Al simplificar la expresión $\frac{16x^2-4y^2}{16x^2+4y^2}$ se obtiene:

A) $\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ B) $\frac{4x-2y}{4x+2y}$ C) $\frac{4x-y}{4x+y}$ D) $\frac{x-y}{x+y}$ E) $\frac{4x^2-y^2}{4x^2+y^2}$

10) Si $x \neq y$, entonces $\frac{x^3}{x-y}+\frac{y^3}{y-x}=$

A) x^2y^2 B) x^2-y^2 C) $x+y$ D) x^2+xy+y^2 E) x^2+y^2

11) Siendo x, y, z todos no nulos, entonces $\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}=$

A) $\frac{1}{x^2y^2z^2}$ B) $\frac{x+y+z}{x^2y^2z^2}$ C) $\frac{3}{x^2y^2z^2}$ D) $\frac{x+y+z}{xyz}$ E) $\frac{x+y+z}{3}$

12) $\frac{3}{y+1}-\frac{2}{y}+\frac{2}{y^2+y}=$

A) $\frac{y-4}{y^2+y}$ B) $\frac{5y+4}{y^2+y}$ C) $\frac{y+4}{y^2+y}$ D) $\frac{3}{y^2+y}$ E) $\frac{1}{y+1}$

13) $\left(\frac{x-1}{x+1}\right):\left(\frac{2x-1}{x^2+2x+1}\right)=$

A) $\frac{2x-1}{2x^2-1}$ B) $\frac{x^2-1}{2x-1}$ C) $x-1$ D) $-x^2$ E) $-\frac{1}{x^2}$

14) $\frac{a^3-b^3}{a^3+b^3}\cdot\frac{a^2-ab+b^2}{a-b}=$

A) $\frac{a^2+ab+b^2}{a+b}$ B) $\frac{a^2-ab+b^2}{a-b}$ C) $\frac{a^2+ab+b^2}{a-b}$ D) $\frac{a^2-ab+b^2}{a+b}$ E) 1

15) Desafío: Simplificando la fracción compuesta $\dfrac{\frac{x+1}{x-1}-\frac{x-1}{x+1}}{\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1}}$ obtenemos:

A) $4x$ B) $2x$ C) 2 D) $\frac{1}{2}$ E) 1