Liceo Marta Donoso Espejo

Raíces para Terceros

1. Raíces cuadradas y cúbicas

Comencemos el estudio de las raíces haciéndonos la siguiente pregunta:
Si el área de un cuadrado es 64 cm^2, ¿cuál es la medida de su lado?

Para responder esto debemos encontrar un número que multiplicado por sí mismo dé cómo resultado 64. Este número se denomina raíz cuadrada de 64 y es 8.

Y si el área de un cuadrado es 15 cm^2, ¿cuál es su lado?

Para responder esto debemos encontrar un número que multiplicado por sí mismo dé 15. Este número se denomina raíz cuadrada de 15 y es prox. 3,8729.

Si generalizamos lo anterior podemos afirmar que: $\sqrt{a} = b \Rightarrow b^2 = a$

Por otro lado, la igualdad: $\sqrt{x^2} = x$ se cumple solo si x > 0, ya que si tene mos $\sqrt{(-3)^2}$, esto no es igual a -3, porque el resultado de la multiplicación de dos números negativos es un número positivo.

Por lo tanto: $\sqrt{x^2} = |x|$ Para cualquier valor real de x.

¿Existe, entonces, la raíz cuadrada de un número negativo? Y si existe, ¿cómo se calcula? Si en la raíz: $\sqrt{a}$, a es negativo, entonces la raíz no es un número real, y se debe determinar como un número imaginario.

Por ejemplo: $\sqrt{-16} = \sqrt{-1} * \sqrt{16} = 4i \longrightarrow i = \sqrt{-1}$

Las raíces cuadradas de números negativos no están definidas en los números reales y aunque en algunas calculadoras científicas al tratar de calcularlas aparece ERROR, esto significa que no tiene valor en R (reales) porque es un número imaginario.

Y si el volumen de un cubo es 64 cm^3, ¿cuál es la medida de su arista? Para responder esto debemos encontrar un número que multiplicado por sí mismo tres veces, sea 64. Este número se denomina raíz cúbica de 64 y es 4, puesto que 4 · 4 · 4 = 64.

Por lo tanto, si la raíz es cúbica, tenemos que: $\sqrt[3]{a} = b \Rightarrow b^3 = a$

En este caso, si a es negativo, entonces *b* resulta ser también negativo, porque el resultado de la multiplicación de tres números negativos será otro negativo. Por otro lado, si a es positivo, *b* también será positivo, debido que al multiplicar tres números positivos, el resultado tendrá signo positivo.
Por lo tanto, la raíz cúbica está definida para todo número real.

Definiendo en forma general:

Índice de la Raíz $\longrightarrow \sqrt[n]{a} \longleftarrow$ Cantidad sub radical

$$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$$

2. Raíces y potencias de exponente fraccionario

La raíz de número se puede definir también mediante una potencia de exponente fraccionario:

$$\sqrt[n]{a^n} = a^{\frac{m}{n}}$$

Donde n es el índice de la raíz, y m el índice de la cantidad sub radical. Como vimos anteriormente, cuando no aparece *n* (índice de la raíz) se entiende que su valor es dos (raíz cuadrada).

Esta definición está sujeta a las siguientes restricciones:

- Las raíces de índice par están definidas solo para números reales positivos.

- Las raíces de índice impar están definidas para todo número real.

Debido a que las raíces pueden convertirse en potencias de exponente fraccionario, cumplen con todas las propiedades de potencias.

3. Propiedades de las raíces

1. Multiplicación de raíces de igual índice

$$\sqrt[n]{a} * \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a*b} \longrightarrow a^{\frac{1}{n}} * b^{\frac{1}{n}} = (a*b)^{\frac{1}{n}}$$

2. División de raíces de igual índice

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \longrightarrow \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[b]{b}} = \frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}} = (a:b)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

3. Raíz de raíz

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n*m]{a} \longrightarrow \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{n*m}} = \sqrt[n*m]{a}$$

4. Raíz de una potencia cuyo exponente es igual al índice

$\sqrt[n]{a^n} = a$ ya que $\sqrt[n]{a^n} = a^{\frac{n}{n}} = a^1 = a$

5. Propiedad de amplificación

$\sqrt[n]{a^r} = \sqrt[nm]{a^{rm}}$ ya que $\sqrt[n]{a^r} = a^{\frac{r}{n}} = a^{\frac{mr}{mn}} = \sqrt[mn]{a^{mr}}$

6. Ingreso de un factor dentro de una raíz

$a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}$ ya que $a * \sqrt[n]{b} = a^1 b^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{n}{n}} * b^{\frac{1}{n}} = \left(a^n * b^1\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a^n * b}$

Además: $\sqrt[n]{0} = 0$ ya que 0 * n = 0; y $\sqrt[n]{1} = 1$ ya que 1*n = 1

Raíz: Racionalización de fracciones con radicales

Tratándose de radicales, el proceso de **racionalización** consiste en eliminar las raíces que se encuentran en el denominador de una fracción.

Dependiendo de las operaciones involucradas dentro de ese denominador pueden presentarse diversos casos:

a) Caso en que el denominador contenga una raíz cuadrada, sin adiciones ni sustracciones.

Ejemplo:

Racionalizar: $\frac{8}{\sqrt{2}}$

Como regla general, amplificamos la fracción por el valor de este denominador, en este caso $\sqrt{2}$, de la siguiente manera:

$$\frac{8}{\sqrt{2}} = \frac{8 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{8\sqrt{2}}{\sqrt[\cancel{2}]{2^{\cancel{2}}}} = \frac{\cancel{8}\sqrt{2}}{\cancel{2}} = 4\sqrt{2}$$

b) Caso en que el denominador contenga una raíz cuadrada, con adiciones o sustracciones.

Ejemplo:

Racionalizar: $\frac{8}{2 - \sqrt{2}} =$

Igual que en el caso anterior, amplificamos la fracción, ahora por $2 + \sqrt{2}$, para formar en el denominador una suma por su diferencia (corresponde al **conjugado, que es la misma expresión pero con signo contrario),** con lo cual dejamos la expresión en:

$$\frac{8}{2-\sqrt{2}} = \frac{8\bullet(2+\sqrt{2})}{(2-\sqrt{2})\bullet(2+\sqrt{2})} = \frac{8(2+\sqrt{2})}{4+2\sqrt{2}-2\sqrt{2}-\sqrt[\cancel{2}]{2^{\cancel{2}}}} =$$

$$= \frac{8(2+\sqrt{2})}{4-2} = \frac{\cancel{8}(2+\sqrt{2})}{\cancel{2}} = 4\bullet(2+\sqrt{2}) = 8+4\sqrt{2}$$

c) Caso en que hay una raíz cúbica en el denominador, sin adiciones o sustracciones.

Ejemplo:

Racionalizar: $\frac{4}{\sqrt[3]{2}} =$

En este caso amplificamos la fracción por $\sqrt[3]{2^2}$, para dejar la expresión del siguiente modo:

$$\frac{4}{\sqrt[3]{2}} = \frac{4\bullet\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2}\bullet\sqrt[3]{2^2}} = \frac{4\bullet\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[\cancel{3}]{2^{\cancel{3}}}} = \frac{\cancel{4}\bullet\sqrt[3]{2^2}}{\cancel{2}} = 2\sqrt[3]{2^2} = 2\sqrt[3]{4}$$

Racionalizar fracciones con radicales en el denominador sirve, entre otras aplicaciones, para **ordenar de mayor a menor** (para comparar) dichas fracciones.

Ejemplo:

Ordenar de menor a mayor las siguientes fracciones:

$$x = \frac{2}{\sqrt{2}}$$

$$y = \frac{1}{1+\sqrt{2}}$$

$$z = \frac{3}{\sqrt{2}-1}$$

De acuerdo a lo aprendido arriba, racionalizamos cada una de las fracciones:

$$x = \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt[\cancel{2}]{2^{\cancel{2}}}} = \frac{\cancel{2}\sqrt{2}}{\cancel{2}} = \sqrt{2}$$

$$y = \frac{1}{1+\sqrt{2}} = \frac{1 \cdot (1-\sqrt{2})}{(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})} = \frac{1-\sqrt{2}}{1 - \sqrt{2} + \sqrt{2} - \sqrt[\cancel{2}]{2^{\cancel{2}}}} = \frac{1-\sqrt{2}}{1-2} = \frac{1-\sqrt{2}}{-1} \cdot \frac{-1}{-1} =$$

$$= \frac{-1+\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2} - 1$$

$$z = \frac{3}{\sqrt{2}-1} = \frac{3 \cdot (\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} = \frac{3(\sqrt{2}+1)}{\sqrt[\cancel{2}]{2^{\cancel{2}}} + \sqrt{2} - \sqrt{2} - 1} = \frac{3\sqrt{2}+3}{2-1} = 3\sqrt{2} + 3$$

Hecho esto, podemos ordenar de mayor a menor:

$$z = 3\sqrt{2} + 3 > x = \sqrt{2} > y = \sqrt{2} - 1$$